Санкт-Петербургский государственный университет

**ЖУКОВ Матвей Максимович**

**Выпускная квалификационная работа**

# Обратное отслеживание в среднем в динамических системах

Уровень образования: Бакалавриат
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2017 «Математика»

Научный руководитель:

Профессор факультета МКН,
Доктор физико-математических наук,

Пилюгин Сергей Юрьевич

Рецензент:

Доцент Математико-механического факультета,
Доктор физико-математических наук,

Крыжевич Сергей Геннадьевич

Санкт-Петербург
2021

# 1 Аннотация

В этой работе рассматривается отслеживание в среднем для линейных эндоморфизмов евклидова пространства. Общее определение отслеживания в среднем было дано Бланком в [1]. Также вводится определение обратного отслеживания в среднем и доказывается, что гиперболический линейный эндоморфизм евклидова пространства обладает этим свойством.

*Ключевые слова: отслеживание траекторий гиперболических систем, отслеживание в среднем, обратное отслеживание в среднем*

# 2 Определения

**Определение.** Линейное отображение

$$L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \;\; x \mapsto Ax$$

евклидова пространства в себя называется *гиперболическим*, если ни одно из собственных чисел матрицы $A$ не равно по модулю 1.

Определение свойства отслеживания в среднем можно найти в [1, с. 328]. Мы же ограничимся определением в интересующем нас случае отображения евклидова пространства.

Зададим на $\mathbb{R}^d$ норму $|\cdot|$ и отображение $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. В случае, если мы рассматриваем гиперболическое отображение, мы имеем в виду *ляпуновскую норму* (см. [2, с.197]).

**Определение.** Пусть $\epsilon > 0$. Последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

называется *$\epsilon$-с-псевдотраекторией* отображения $f$, если найдется $N > 0$ такое, что для любого натурального $m > N$ и любого целого неотрицательного $k$ выполняется

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} |x_{n+k+1} - f(x_{n+k})| < \epsilon.$$

**Определение.** Отображение

$$f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

обладает свойством *отслеживания в среднем,* если для любого $\delta > 0$ найдется $\epsilon > 0$ такое, что для всякой $\epsilon$-с-псевдотраектории $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется точка $p \in \mathbb{R}^d$ такая, что

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |f^k(p) - x_k| < \delta.$$

Далее введем определения, относящиеся к обратному отслеживанию. Следующее определение вы можете найти в [2, с. 190]

**Определение.** Семейство непрерывных отображений

$$\Psi = \{\psi_k \mid \psi_k\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ k = 1, 2, 3, \dots\}$$

будем называть *c-методом* отображения $f$, если

$$\|\psi_k - f\| < c, \text{ где } \|\psi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\psi(x)|.$$

**Определение.** Будем говорить, что отображение $f$ обладает свойством *обратного отслеживания в среднем*, если для любого $\epsilon > 0$ существует $c > 0$ такое, что для любой точки $p \in \mathbb{R}^d$ и любого $c$-метода $\Psi$ существует траектория $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ метода $\Psi$, то есть

$$\{x_n \mid x_{n+1} = \psi_n(x_n),\, n = 1, 2, 3, \dots\},$$

такая, что

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |x_k - f^k(p)| < \epsilon.$$

# 3 Формулировка результатов

**Теорема 1.** *Пусть*

$$f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\, f \colon x \mapsto Ax$$

*– линейное отображение $\mathbb{R}^d$ в себя. Тогда следующие утвеждения равносильны:*

1. *Матрица $A$ – гиперболическая.*
2. *Отображение $f$ обладает свойством отслеживания в среднем.*

**Теорема 2.** *Пусть $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – гиперболическое линейное отображение. Тогда $f$ обладает свойством обратного отслеживания в среднем.*

# 4 Доказательства

**Доказательство** (теорема 1)**.** Сначала докажем, что из гиперболичности следует отслеживание в среднем. Нам дана произвольная $\epsilon$-c-псевдотраектория $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для произвольной точки $p \in \mathbb{R}^d$ обозначим

$$p_k = f^k(p),\, k = 1, 2, 3, \dots,$$
$$p_k = x_k + v_k.$$

В данных обозначениях выполняется

$$x_{k+1} + v_{k+1} = p_{k+1} = Ap_k = Ax_k + Av_k$$
$$v_{k+1} = Av_k + g_{k+1}, \text{ где}$$
$$g_{k+1} = Ax_k - x_{k+1}.$$

Положим $g_1 = 0$.

Поскольку $A$ – гиперболическая, можно представить

$$\mathbb{R}^d = S \oplus U,$$

где $S$ – *устойчивое подпространство*, а $U$ – *неустойчивое подпространство.* Введем обозначения $P$ и $Q$ для проекторов на $S$ и $U$ соответственно. Гиперболичность матрицы $A$ дает существование постоянных $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ таких, что для всяких $v \in \mathbb{R}^d$, $s \in \mathbb{Z}_+$ выполняется:

$$|A^s P v| < C\lambda^s |v|, \ |A^{-s} Q v| < C\lambda^s |v|.$$

Будем искать $v_k$ в виде

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} A^{k-i} P g_i - \sum_{i=k+1}^{\infty} A^{k-i} Q g_i.$$

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned}
A v_k + g_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k} A^{(k+1)-i} P g_i - \sum_{i=k+1}^{\infty} A^{(k+1)-i} Q g_i + g_{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} A^{(k+1)-i} P g_i - \sum_{i=k+2}^{\infty} A^{(k+1)-i} Q g_i + \underbrace{(g_{k+1} - Q g_{k+1})}_{P g_{k+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} A^{(k+1)-i} P g_i - \sum_{i=k+2}^{\infty} A^{(k+1)-i} Q g_i \\
&= v_{k+1}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\{x_n\}$ – $\epsilon$-с-псевдотраектория, то существует $N > 0$ такое, что для всех натуральных $m > N$, $k > 0$ выполняется

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m} |g_{n+k}| < \epsilon. \tag{1}$$

Возьмем произвольное $M > 2N$. Оценим выражение

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} |v_k| \leqslant \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \left| \sum_{i=1}^{k} A^{k-i} P g_i - \sum_{i=k+1}^{\infty} A^{k-i} Q g_i \right| \leqslant \frac{C}{M} \sum_{k=1}^{M} \left( \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} |g_i| + \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda^{i-k} |g_i| \right).$$

Переходя к суммированию по $i$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} |v_k| \leqslant \frac{C}{M} \Bigg( & \sum_{i=1}^{M} \underbrace{(\lambda^{i-1} + \lambda^{i-2} + \dots + \lambda + 1 + \lambda + \dots + \lambda^{M-i})}_{\leqslant \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} |g_i| + \\
& + \sum_{i=M+1}^{\infty} \lambda^{i-M} \underbrace{(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{M-1})}_{\leqslant \frac{1}{1-\lambda}} |g_i| \Bigg)
\end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое отдельно:

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \lambda^i |g_i| \leqslant \lambda^{M+1} \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^{tM} \sum_{i=M(t+1)+1}^{M(t+2)} |g_i| \overset{(1)}{\leqslant} \lambda^{M+1} \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^{tM} \cdot M\epsilon \leqslant \frac{\lambda^{M+1} M\epsilon}{1 - \lambda^M}.$$

Соединяя оценки вместе получаем

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} |v_k| \leqslant \frac{C}{M} \left( \frac{M\epsilon(1+\lambda)}{1-\lambda} + \frac{\lambda M \epsilon}{(1-\lambda^M)(1-\lambda)} \right) = C\epsilon \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{(1-\lambda^M)(1-\lambda)} \right).$$

Наконец, получаем

$$\limsup_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}|v_k| \leqslant C\epsilon\frac{1+2\lambda}{1-\lambda}.$$

Таким образом, по любому $\delta > 0$ мы можем взять

$$\epsilon = \delta \Bigg/ \left(C\frac{1+2\lambda}{1-\lambda}\right).$$

Теперь докажем, что из свойства отслеживания в среднем отображения $f$ следует гиперболичность матрицы $A$.

В [2, с.208] в случае негиперболической матрицы $A$ строится последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}^d$ такая, что

$$|f(x_n) - x_{n+1}| < \varepsilon,\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

при этом для любой точки $p \in \mathbb{R}^d$ последовательность

$$\{|A^n p - x_n| \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

неограниченно монотонно возрастает. Заметим, что из (2) сразу следует, что для любых натуральных $m, k > 0$ выполняется

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}|x_{n+k+1} - f(x_{n+k})| < \epsilon,$$

то есть $\{x_n\}$ является $\epsilon$-с-псевдотраекторией. При этом неограниченное возрастание $|A^n p - x_n|$ влечет

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|A^k p - x_k| = +\infty.$$

Таким образом, мы получили, что отображение $f\colon x \mapsto Ax$ с негиперболической матрицей $A$ не может обладать свойством отслеживания в среднем.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку $p \in \mathbb{R}^d$ и $c$-метод $\Psi$ отображения $f\colon x \mapsto Ax$ с гиперболической матрицей $A$. Введем обозначения

$$p_k = f^k(p),\ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Будем искать траекторию $\Psi$ в виде

$$x_k = p_k + v_k.$$

По определению

$$x_{k+1} = \psi_k(x_k)$$

$$p_{k+1} + v_{k+1} = \psi_k(p_k + v_k) \tag{3}$$

$$v_{k+1} = Av_k + G_{k+1}(v_k),\ \text{где } G_{k+1}(v) = (\psi_k(p_k + v) - A(p_k + v)).$$

По определению $c$-метода мы имеем

$$|G_{k+1}(v_k)| < c.$$

Рассмотрим пространство последовательностей

$$E = \{V = \{v_k\}_{k=1}^{\infty} \mid \sup_k |v_k| \leqslant Fc\},$$

где $F > 0$ – некоторый параметр, который мы зафиксируем позже. Определим на $E$ операторы

$$Z(V) = \{z_k(V)\},\ z_{k+1}(V) = G_{k+1}(v_k).$$

и $R(V) = W = \{w_k\}$, где

$$w_k = \sum_{i=1}^{k} A^{k-i} P z_i(V) - \sum_{i=k+1}^{\infty} A^{k-i} Q z_i(V), \tag{4}$$

где $P, Q$ – проекторы на устойчивое и неустойчивое подпространства $A$ соответственно. Поскольку матрица $A$ – гиперболическая, то существует $0 < \lambda < 1$ такое, что

$$|A^k P v| \leqslant C\lambda^k |v|,\ k = 1, 2, 3, \dots,$$
$$|A^{-k} Q v| \leqslant C\lambda^k |v|,\ k = 1, 2, 3, \dots.$$

Оценим

$$|w_k| = \left|\sum_{i=1}^{k} A^{k-i} P z_i(V)\right| + \left|\sum_{i=k+1}^{\infty} A^{k-i} Q z_i(V)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} C\lambda^{k-i} \underbrace{|z_i(V)|}_{\leqslant c} + \sum_{i=k+1}^{\infty} C\lambda^{i-k} \underbrace{|z_i(V)|}_{\leqslant c} \leqslant c\frac{C(1+\lambda)}{1-\lambda}.$$

Таким образом, взяв $F = C\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$, мы получим, что $R(E) \subset E$.

Зададим на $E$ метрику

$$\mathrm{dist}(V, V') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|v_i - v_i'|}{2^i},$$

которая порождает на $E$ тихоновскую топологию произведения. Поскольку $E$ – счетное произведение компактных шаров, то пространство $E$ – компактное в тихоновской топологии. Покажем, что отображние $R$ непрерывно на $E$.

Пусть $m$ – натуральное число. Рассмотрим пространство конечных последовательностей

$$E_m = \{V = \{v_k \in R^d \mid k \leqslant m\}\},$$

для которых верны неравенства

$$\|V\|_m = \max_{k \leqslant m} |v_k| \leqslant Fc.$$

Обозначим через $\pi_m$ и $\pi_m^l$, $m \leqslant l$, естественные проекторы $E$ на $E_m$ и $E_l$ на $E_m$ соответственно.

Введем операторы $R_m\colon E \to E_m$ аналогично оператору $R$: $R_m(V) = W = \{w_k \mid k \leqslant m\}$, где

$$w_k = \sum_{i=1}^{m} A^{k-i} P z_i(V) - \sum_{i=k+1}^{m} A^{k-i} Q z_i(V).$$

Поскольку значения $z_i(V)$, $i \leqslant m$ определяются лишь значениями $v_k$, $k \leqslant m+1$, то оператор $R_m$ непрерывен. Оператор $\pi_m R$ отображает $v$ в последовательность $\{w_k \mid k \leqslant m\}$, где $w_k$ определены (4).

Зафиксируем $l > m$ и рассмотрим оператор

$$\pi^l_m R_m \colon V \mapsto \{w'_k \mid k \leqslant m\}, \quad w'_k = \sum_{i=1}^{k} A^{k-i} P z_i(V) - \sum_{i=k+1}^{l} A^{k-i} Q z_i(V).$$

Далее оценим

$$\|\pi_m R(V) - \pi^l_m R_l(V)\|_m = \max_{k \leqslant m} |w_k - w'_k| \leqslant CFc \max_{k \leqslant m} \sum_{i=l+1}^{\infty} \lambda^{i-k} \leqslant \lambda^l \frac{2cFC\lambda^{1-m}}{1-\lambda}.$$

Таким образом, $\pi_m R$ – равномерный предел операторов $\pi^l_m R_l$, которые непрерывны. Таким образом, оператор. $\pi_m R$ непрерывен, откуда из определения тихоновской топологии, мы получаем, что $R$ непрерывен.

Отсюда следует, что $R$ имеет неподвижную точку на $E$. Эта последовательность $V = \{v_k\}$, $R(V) = V$ будет удовлетворять (3). При этом выполняется оценка

$$\limsup_{M \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} |v_k| \leqslant Fc,$$

откуда по $\epsilon$ можно взять $c = \epsilon \Big/ \left( C \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)$

# 5 Список литературы

[1] Бланк М.Л. Устойчивость и локализация в хаотической динамике. - Издательство МЦНМО, 2001. 352 с.

[2] Пилюгин С. Ю. Пространства динамических систем. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 272 с.